Wir zählen bis drei — und sogar darüber hinaus

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Für jedes n=1,2,3,... gilt — Mathematikbücher sind voll von Sätzen, die so beginnen. Was aber bedeuten darin die drei ominösen Punkte „...“? Natürlich — so ein spontaner Gedanke — wissen wir, was damit gemeint ist. Nämlich, dass die Behauptung nicht nur für 1, 2 und 3 gilt, sondern für ALLE natürlichen Zahlen. Geben wir uns mit dieser Erklärung zufrieden, könnten uns begabte Schülerinnen oder Schüler mit einigen simplen, aber nur scheinbar naiven Fragen einigermaßen in Verlegenheit bringen:

Wer hat schon alle natürlichen Zahlen persönlich kennengelernt? (Schließlich gibt es unendlich viele!) Wie lässt sich allgemein sagen, was wir unter einer natürlichen Zahl überhaupt verstehen? Und wie können wir über diese unendlich vielen Dinge gar etwas beweisen (etwa die allgemeingültige Formel $a + b = b + a$), wo doch alle möglichen Werte für a und b einzeln zu überprüfen gar nicht möglich ist?

Schnell wird einem klar, dass diese höchst spannenden Fragen an den fundamentalsten Grundlagen der Mathematik rühren. In diesem Artikel diskutiere ich einige der prominentesten Lösungsvorschläge, die die Mathematik anzubieten hat. Ob damit auch alle philosophischen Fragen ein für alle Male ausgeräumt sind, kann auf diese Weise allerdings nicht garantiert werden. Bilden Sie sich Ihr eigenes Urteil!

1 Einleitung

Was ist eine Zahl? Fragt ein dreijähriges Kind danach, werden wir vielleicht seine Finger in die Hand nehmen, ihm zu gewissen Stellungen derselben die Wörter *eins, zwei, drei, vier, fünf* vorsagen und es ermuntern, diese nachzuplappern. Ist das Kind sechs Jahre alt, werden wir uns vielleicht denken, es habe die Schulreife noch nicht ganz erreicht, wenn es mit Zahlen noch nichts anfangen kann. Bei etwas älteren Kindern mag es sein, dass sie nur Aufmerksamkeit erregen wollen, ohne sich wirklich für die Antwort auf ihre Frage zu interessieren. Vielleicht ist die Frage nach einer solchen scheinbaren Trivialität aber auch als Indiz für eine außergewöhnliche mathematische oder philosophische Begabung zu werten und verdient eine fundierte Antwort.

Was eine Zahl ist und was uns berechtigt, mit Zahlen in gewohnter Weise umzugehen, ist nämlich keineswegs eine Trivialität. Was zum Beispiel bedeuten in der Aussage

$$\text{Für alle } a, b, c = 0, 1, 2, \ldots \text{ gilt } (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(Assoziativgesetz der Addition)}$$

die Symbole $0, 1, 2, +$, was die drei Punkte „...“, und wie lässt sich die Behauptung mit endlichen Mitteln beweisen, obwohl sie sich auf unendlich viele Objekte bezieht?

Es waren einige der größten Mathematiker und Philosophen, die sich mit derartigen Fragen beschäftigten; und mehr oder weniger befriedigende Erklärungen sind nicht einmal viel älter als hundert Jahre. (Ein instruktiver historischer Überblick ist z.B. in [1] zu finden.) Wer Mathematik unterrichtet, sollte mit den wichtigsten davon vertraut sein, um Interessierten und Begabten den Zugang zum faszinierenden Gebiet der mathematischen Grundlagenfragen zu erleichtern. In diesem Artikel möchte ich dafür einige Anregungen geben. Wer sich darüber hinaus auch für die Zahlbereichserweiterungen und einige weitere Aspekte in einer Darstellung, die auch im Schulunterricht gut umsetzbar ist, interessiert, sei auf [7] hingewiesen.

Eine Konsequenz aus den Erörterungen wird sein, den Mengenbegriff in seiner fundamentalen Rolle in der Mathematik bestätigt zu sehen. Auch ist er alles andere als abstrakt. Die natürlichen Zahlen — gemeinhin als die am unmittelbarsten gegebenen Objekte der Mathematik angesehen — sind abstrakter als Mengen, weil sie ihren Sinn erst vor dem Hintergrund von Mengen (in welcher Formalisierung auch immer) bekommen. Nur weil wir uns alle schon als Kleinkinder an diese Abstraktion gewöhnt haben, erscheint sie uns selbstverständlich — so wie für Mathematiker auch viel kompliziertere und anspruchsvollere Gebilde aus ihren jeweiligen Spezialgebieten selbstverständlich und konkret sind.

Zur Gliederung dieses Artikels: Im Abschnitt 2 stelle ich die Peanoaxiome vor als den vielleicht bekanntesten Ansatz, das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zu fassen. Wie weit dieser Ansatz für die Bedürfnisse der Mathematik ausreicht, wird im Abschnitt 3 diskutiert. Es stellt sich heraus, dass die Peanoaxiome das System $\mathbb{N}$ zwar als Ganzes sehr gut beschreiben, dass aber die Bedeutung der einzelnen Zahlen dadurch noch nicht hinreichend erklärt wird. Abschnitt 4 bringt einen ersten Versuch in diese Richtung. Dabei gelingt es, jede beliebig vorgegebene natürliche Zahl rein logisch zu beschreiben; die Möglichkeit, $\mathbb{N}$ als Ganzes zu erfassen, geht dabei aber verloren. Erfolgreicher ist der mengentheoretische Zugang von Georg Cantor, der seinen Ausgangspunkt beim Größenvergleich von Mengen mittels Bijektionen nimmt (Abschnitt 5). Es war aber erst einige Jahrzehnte später, als John von Neumann die mengentheoretische Sichtweise konsequent zu Ende dachte und die natürlichen Zahlen selbst ebenso als Mengen deutete wie ihre Gesamtheit $\mathbb{N}$. Sein mengentheoretisches Modell wird im Abschnitt 6 vorgestellt und im Abschnitt 7 um die arithmetischen Aspekte bereichert.

Ein paar der nicht sehr zahlreichen Beweise, vorwiegend in den letzten beiden Abschnitten 6 und 7, sind — obwohl allesamt nicht sehr schwierig — etwas technisch oder gar formalistisch. Ich habe sie der Vollständigkeit halber in den Text aufgenommen und nicht, weil sie für das Verständnis der meist übergeordneten Gedanken immer notwendig wären. Meist geht es nur darum, *dass* etwas mit bestimmten Mitteln bewiesen werden kann und weniger darum, *wie* die formal korrekte Ausführung lautet. Wer über diese Beweise beim Lesen lieber hinweggehen möchte, kann das also getrost tun, ohne dadurch das Wesentliche zu versäumen.

2 Der Prozess des Zählens und die Peanoschen Axiome

So weit wir menschliche Zivilisation in die Frühzeit zurückverfolgen können — also viele Jahrtausende —, gibt es keinen Zweifel, dass Zahlen damals eine grundlegende Rolle im menschlichen Denken spielten und ein gewisses Zahlenverständnis für die Bewältigung des praktischen Lebens unerlässlich war. Umso erstaunlicher ist es, dass der erste nachhaltige Ansatz, das System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auch zu definieren, erst wenig mehr als ein Jahrhundert alt ist. Es war im Jahre 1888, als Richard Dedekind (1831–1916) seinen Ansatz vorlegte (vgl. [3]), den 1889 Giuseppe Peano (1858–1932) in Form der heute als *Peanoaxiome* bekannten Aussagen formulierte (vgl. [9]).

Vielleicht wäre es glücklicher, das Wort *Axiom*, welches vor allem bei Nichtmathematikern die Assoziation mit doktrinär vorgegebenen und nicht in Frage zu stellenden Geboten wachrufen mag, durch vorsichtigere Ausdrücke zu ersetzen wie etwa *Eigenschaft*. Nach dem Verständnis der modernen Mathematik handelt es sich bei sogenannten Axiomensystemen nämlich eher um Definitionen; so wie auch die Gruppenaxiome definieren, was eine Gruppe ist und keineswegs behaupten, dass alles in der Welt Gruppe zu sein habe. Ähnlich lassen sich Peanoaxiome wohl am besten als mathematisch präzise Beschreibung auffassen, was wir unter dem System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen verstehen. Ganz dem ursprünglichen lateinischen Wortsinn von *Definition* entsprechend ziehen die Peanoaxiome eine Grenze zwischen all dem, was wir als Zahlenreihe (als System der natürlichen Zahlen) gelten lassen, und was nicht. Aus Tradition werde ich aber weiterhin auch von *Axiomen* sprechen. Wie weit die durch Peano gegebene Axiomatik/Definition der natürlichen Zahlen befriedigend ist, wird noch zu diskutieren sein. Sie lautet:

1. **(PA1)** Null ist eine (natürliche) Zahl (die wir auszeichnen und mit dem festen Symbol 0 bezeichnen), symbolisch: $0 \in \mathbb{N}$.

2. **(PA2)** Jede Zahl n besitzt eine andere Zahl n' als sogenannten *Nachfolger*, symbolisch:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} :\ m = n'.$$

(Manchmal werde ich es vorziehen, den Nachfolger n' von n mit $\nu(n)$ zu bezeichnen und damit zu betonen, dass eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n' = \nu(n)$ vorliegt.)

3. **(PA3)** Null ist kein Nachfolger, symbolisch: $\forall n \in \mathbb{N} :\ n' \neq 0$.

4. **(PA4)** Verschiedene Zahlen haben auch verschiedene Nachfolger, symbolisch:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} :\ (m' = n' \Longrightarrow m = n).$$

5. **(PA5, Induktionsprinzip):** Nennt man eine Menge induktiv, wenn sie die Null enthält und mit jeder Zahl auch ihren Nachfolger, so lautet das Induktionsprinzip: Jede induktive Menge enthält alle natürlichen Zahlen, symbolisch:

$$(0 \in T \wedge \forall n :\ n \in T \Longrightarrow n' \in T) \Longrightarrow T \supseteq \mathbb{N}.$$

6. **(PA6)** Null trägt zu einer Summe nichts bei, und die Summe einer Zahl mit einem Nachfolger ist der Nachfolger der Summe der ursprünglichen beiden Zahlen, genauer: Auf $\mathbb{N}$ ist eine (Addition genannte) binäre Operation $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$, derart definiert, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichungen

   (a) $n + 0 = n$ und

   (b) $n + m' = (n + m)'$

   gelten.

7. **(PA7)** Null macht jedes Produkt zu Null, und das Produkt einer Zahl mit einem Nachfolger ist das Produkt der ursprünglichen beiden Zahlen, vermehrt um den ersten Faktor, genauer: Auf $\mathbb{N}$ ist eine (Multiplikation genannte) binäre Operation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (der Punkt wird meist auch weggelassen), derart definiert, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichungen

   (a) $n0 = 0$ und

   (b) $nm' = nm + n$

   gelten. (Die rechte Seite in (b) ist gemäß der üblichen Klammerungskonvention zu lesen, d. h. als $(nm) + n$.)

Oft werden unter der Bezeichnung *Peanoaxiome* auch nur die ersten fünf gemeint, die für sich die Zahlenreihe schon hinreichend festlegen, sofern man auf die Rechenoperationen verzichtet. Vor einer genaueren Diskussion will ich auf Varianten hinweisen.

Manchmal (wie auch in Peanos Originalarbeit) wird die Null nicht als natürliche Zahl aufgefasst, sondern mit der Eins begonnen. Entsprechend müsste PA1 verändert werden zu $1 \in \mathbb{N}$ und PA3 zu $\forall n \in \mathbb{N} :\ n' \neq 1$. Warum wir hier die Null einschließen, wird später klar werden, wenn wir sie als Kardinalität der leeren Menge brauchen.

Das Induktionsprinzip wird oft nicht über Teilmengen T, sondern über Eigenschaften formuliert: Jede Eigenschaft φ, welche der Zahl Null zukommt und welche sich auf Nachfolger vererbt, kommt allen natürlichen Zahlen zu, symbolisch:

$$(\varphi(0) \wedge \forall n :\ (\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n'))) \Longrightarrow \forall n :\ \varphi(n).$$

Vordergründig scheint diese Formulierung das gleiche zu leisten wie die mengentheoretische. Eine genauere Analyse hebt jedoch faszinierende Feinheiten ans Licht, die ich an dieser Stelle nicht weiter vertiefen kann, später aber nochmals kurz aufgreifen werde.

Eine modernere und etwas konzisere Formulierung der Peanoaxiome PA1–PA5 könnte — in einem Satz zusammengefasst — lauten: Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in \mathbb{N}$ und einer injektiven Funktion $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolgerfunktion) mit $0 \notin \nu(\mathbb{N})$ derart, dass $T \subseteq \mathbb{N}$ und $\nu(T) \subseteq T$ nur für $T = \mathbb{N}$ gilt. Dieser Gesichtspunkt wird im nächsten Abschnitt, wo von Modellen die Rede ist, noch in den Vordergrund treten.

Doch nun zur angekündigten Diskussion der Peanoaxiome. PA1 bis PA5 beziehen sich auf das Zählen, PA6 und PA7 aufs Rechnen. Peanos Leistung besteht natürlich nicht darin, diese sieben ziemlich trivialen Tatsachen entdeckt zu haben. Sie waren Menschen selbstverständlich, seit gezählt wurde, und das ist länger her als die Erfindung der Schrift. (Eine Sonderrolle nimmt das Induktionsprinzip ein, dessen explizite Formulierung erst in der Neuzeit auftrat, etwa in Form von Fermats Prinzip des *descent infini*.) Das Große an Peanos Leistung ist die Erkenntnis, dass mit diesen wenigen einfachen Feststellungen in gewisser Hinsicht alles Wichtige über die natürlichen Zahlen gesagt ist. Interessant ist auch, dass es nicht wesentlich einfacher geht. Um das einzusehen, überlegen wir uns, dass wir tatsächlich auf keine der sieben Aussagen verzichten können.

1. Verzichtet man auf PA1, könnte das System $\mathbb{N}$ auch die leere Menge sein (auch wenn in PA3, PA6 und PA7 das Symbol 0 nochmals vorkommt.)
2. Ohne PA2 gäbe es kein Weiterzählen, und $\mathbb{N} = \{0\}$ wäre möglicherweise schon alles.
3. PA3 garantiert, dass auch $\mathbb{N} = \{0\}$ mit $0' = 0$ verboten ist.
4. Ähnlich PA3 schließt PA4 ein Steckenbleiben des Zählens aus wie etwa $\mathbb{N} = \{0, 1\}$, $0' = 1$ und $1' = 1$, oder ein Zählen im Kreis wie z. B. 0-1-2-3-1-2-3-1-2-3- etc.
5. Die ersten vier Axiome garantieren, dass das Zählen mit Null beginnend und von Nachfolger zu Nachfolger genau so fortschreitet, wie wir es gewohnt sind. Nicht jedoch wird durch sie ausgeschlossen, dass es gewissermaßen abseits der üblichen Zahlenreihe noch andere Zahlen gibt (zu denen auch Nachfolger etc. existieren könnten). Genau das wird durch das Induktionsaxiom ausgeschlossen. Denn alles, was mit Null beginnend jeden Nachfolger erfasst, kann einerseits keine natürliche Zahl auslassen, andererseits gerät man dadurch aber auch nicht auf Abwege. Die herausragende Rolle des Induktionsprinzips wird noch deutlicher werden. Es ist das erste und entscheidende Mittel der Mathematik, Allaussagen zu beweisen, die sich auf unendliche Mengen beziehen, nämlich zunächst auf $\mathbb{N}$.
6. PA6 ist das einzige Axiom, das uns Information über die Addition in die Hand gibt, also sicher unerlässlich. Ohne den ersten Teil wüssten wir nicht, was Addition von 0 bedeutet, ohne den zweiten wäre die Addition aller anderen Zahlen völlig unbestimmt.
7. PA7 leistet für die Multiplikation das gleiche wie PA6 für die Addition (wobei in PA7 die Addition bereits vorausgesetzt wird).

Ausgedrückt in der Terminologie der mathematischen Logik bedeuten diese Überlegungen, dass die Peanoaxiome untereinander unabhängig sind. Diese Eigenschaft eines Axiomensystems drückt eine ästhetisch ansprechende Sparsamkeit aus, wäre aber nicht unbedingt notwendig. Viel wichtiger ist, ob die enthaltene Information ausreicht. Das soll nun diskutiert werden.

3 Reichen die Peanoaxiome aus?

In der Einleitung habe ich das Assoziativgesetz der Addition als Beispiel einer Aussage angeführt, die für unendlich viele Objekte zutrifft. Einen ersten Test würden die Peanoaxiome bestehen, wenn wir einsehen könnten, dass dieses Assoziativgesetz notwendig aus ihnen folgt. Dafür ist ein sorgfältiger Beweis erforderlich, der in jedem Schritt nur verwenden darf, was durch die Peanoaxiome explizit gefordert wird. Tatsächlich fällt so ein Beweis nicht schwer:

Man betrachtet die Menge T aller $c \in \mathbb{N}$, welche die Eigenschaft haben, dass die Beziehung $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. Nach dem Induktionsprinzip (PA5) ist lediglich zu zeigen, dass T induktiv ist. Die erste Forderung dafür ($0 \in T$, Induktionsanfang) ergibt sich sofort aus der Beziehung

$$(a+b)+0 \overset{\text{PA6(a)}}{=} a+b \overset{\text{PA6(a)}}{=} a+(b+0).$$

Für die zweite Forderung ($\forall n: n \in T \Longrightarrow n' \in T$, Induktionsschritt) dürfen wir die Voraussetzung (Vor) $c \in T$, also $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$, verwenden und müssen daraus $c' \in T$, also $(a+b)+c' = a+(b+c')$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ herleiten. Tatsächlich ergibt sich

$$(a+b)+c' \overset{\text{PA6(b)}}{=} ((a+b)+c)' \overset{\text{Vor}}{=} (a+(b+c))' \overset{\text{PA6(b)}}{=} a+(b+c)' \overset{\text{PA6(b)}}{=} a+(b+c'),$$

was zu zeigen war.

Hervorheben möchte ich die zentrale Rolle des Induktionsprinzips in diesem Beweis. Nur mit seiner Hilfe konnte die Aussage **für alle** natürlichen Zahlen **mit einem einzigen Beweis endlicher Länge** hergeleitet werden.

In ähnlicher, fast stereotyper Weise könnte man Gesetze wie $0+a=a$, $a+b=b+a$ und alle anderen grundlegenden arithmetischen Eigenschaften herleiten, wobei es im Wesentlichen nur darauf ankommt, in der richtigen Reihenfolge vorzugehen. Als Übung mag das durchaus empfehlenswert sein. Wir wollen uns damit aber nicht aufhalten. Eine viel stärkere und entsprechend interessantere Aussage wäre, dass das System der natürlichen Zahlen, d. h. die Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit dem ausgezeichneten Element 0, der Nachfolgerabbildung, der Addition und der Multiplikation (man beachte, dass in den Peanoaxiomen nichts anderes auftritt) durch die Peanoaxiome im Wesentlichen eindeutig festgelegt ist. Doch was soll *im Wesentlichen* bedeuten?

Es ist uns sicher nicht wichtig, ob die Elemente von $\mathbb{N}$ mit $0, 1, 2, \ldots$ bezeichnet werden, mit null, eins, zwei etc., mit zero, one, two etc., oder sonstwie. Sehr wohl kommt es uns aber auf die Struktur ab, die sie bilden. Um das präzise zu fassen, müssen wir ein paar Begriffe einführen:

Sei M eine Menge, $o \in M$ (o soll der Null entsprechen, vgl. PA1) und $\nu : M \to M$ (Nachfolgerfunktion, entspricht PA2). Dann nennen wir $\mathcal{M} = (M, o, \nu)$ ein **Modell** für die ersten fünf Peanoaxiome, falls $o \notin \nu(M)$ (PA3), ν injektiv ist (PA4) und M selbst die einzige Teilmenge $T \subseteq M$ mit $o \in T$ und $\nu(T) \subseteq T$ (PA5, Induktionsprinzip). Zwei Modelle $\mathcal{M}_1 = (M_1, o_1, \nu_1)$ und $\mathcal{M}_2 = (M_2, o_2, \nu_2)$ von PA1-PA5 heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ gibt. Explizit bedeutet das: $f : M_1 \to M_2$ ist bijektiv und erfüllt die Homomorphiebedingungen $f(o_1) = o_2$ und $f \circ \nu_1 = \nu_2 \circ f$, d. h. $f(\nu_1(m_1)) = \nu_2(f(m_1))$ für alle $m_1 \in M_1$.

Will man auch die Axiome PA6 und PA7 miteinbeziehen, braucht man ein Modell $\mathcal{M} = (M, o, \nu)$ für PA1–PA5 und zusätzlich zwei binäre Operationen $+, \cdot : M^2 \to M$ (also $+ : (m,n) \mapsto m+n$ und $\cdot : (m,n) \mapsto m \cdot n$), welche die Bedingungen $m + o = m$ (PA6(a)), $m + \nu(n) = \nu(m+n)$ (PA6(b)), $m \cdot o = o$ (PA7(a)) und $m \cdot \nu(n) = m \cdot n + m$ (PA7(b)) erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen heißt $\mathcal{M} = (M, o, \nu, +, \cdot)$ ein Modell der Peanoaxiome PA1–PA7. Von einem Isomorphismus f zwischen zwei solchen Modellen $\mathcal{M}_1 = (M_1, o_1, \nu_1, +_1, \cdot_1)$ und $\mathcal{M}_2 = (M_2, o_2, \nu_2, +_2, \cdot_2)$ verlangt man zusätzlich noch die Homomorphiebedingungen für Addition und Multiplikation, also $f(m +_1 n) = f(m) +_2 f(n)$ und $f(m \cdot_1 n) = f(m) \cdot_2 f(n)$ für alle $m, n \in M_1$.

Niemanden sollte der nun folgende Satz überraschen:

Satz 1 *Je zwei Modelle der Peanoaxiome PA1–PA5 (PA5 wohlgemerkt in der mengentheoretischen Fassung) sind isomorph, wobei der zugehörige Isomorphismus sogar eindeutig bestimmt ist. Das gleiche gilt für Modelle der Peanoaxiome PA1–PA7.*

Ein formal vollständiger **Beweis** dieses Satzes wäre etwas länglich und nicht besonders spannend. Die Idee wird unter Verwendung der Notation von weiter oben in einer knappen Beweisskizze hinreichend klar: Zunächst ist der Isomorphismus f zu konstruieren. $f(o_1) = o_2$ und $f(\nu_1(m_1)) = \nu_2(f(m_1))$ sind uns durch die Definition eines Isomorphismus vorgegeben. Das legt die Werte von f an den Stellen $\nu_1(o_1), \nu_1(\nu_1(o_1))$ etc. eindeutig fest, genauer also für alle $m_1 \in T \subseteq M_1$, wenn T die kleinste induktive Teilmenge von M_1 bezeichnet. Weil $\mathcal{M}_1$ PA5 erfüllt, ist aber bereits

$T = M_1$. Dass diese Definition von f nicht widersprüchlich ist, folgt aus der Injektivität von ν_1 (PA4) und weil $o_1 \notin \nu_1(M_1)$ (PA3). Offenbar kommt nur dieses eine f als Isomorphismus in Frage. Dass f tatsächlich ein Isomorphismus ist, folgt daraus, dass auch $\mathcal{M}_2$ ein Modell für PA1–PA5 ist: PA3 und PA4 erzwingen die Injektivität von f und PA5 die Surjektivität. (Man beachte, dass natürlich auch PA1 und PA2 verwendet wurden, nämlich bei den f definierenden Bedingungen.) Geht man von Modellen auch für PA6 und PA7 aus, sind die zusätzlichen Homorphiebedingungen für Addition und Multiplikation leicht mittels Induktion nachzuweisen.

(Um allfälligen Missverständnissen vorzubeugen: In der obigen Beweisskizze erweist es sich als essenziell, dass das Induktionsprinzip in Mengenschreibweise formuliert war. Nur so lässt sich überhaupt von der kleinsten induktiven Menge $T \subseteq M_1$ sprechen. Formuliert man das Induktionsprinzip hingegen über Eigenschaften, die 0 besitzt und die sich auf Nachfolger vererben, so muss geklärt werden, welche Eigenschaften zugelassen sind. Es liegen gute Gründe vor, sich auf jene Eigenschaften zu beschränken, die sich in Formeln ausdrücken lassen, wo nur die Symbole für die Null, den Nachfolger, die Addition und die Multiplikation vorkommen, nicht jedoch mengentheoretische Symbole wie $\in$ oder $\subseteq$. Es zeigt sich, dass unter dieser sprachlichen Einschränkung Satz 1 nicht gilt. Es gibt dann nämlich sogenannte Nonstandardmodelle der Peanoaxiome, die nicht isomorph sind zum üblichen System der natürlichen Zahlen. Die Unterschiede zum Standardmodell lassen sich aber nicht in der eingeschränkteren formalen Sprache ausdrücken. Wen die Hintergründe dazu interessieren, der sei auf Lehrbücher der mathematischen Logik verwiesen, z. B. [11] oder [6]. Insbesondere achte man auf die Besonderheiten der Prädikatenlogik erster Stufe, wo der erstmals von Kurt Gödel (1906–1978) in seiner Dissertation [5] bewiesene Vollständigkeitssatz gilt, ganz im Gegensatz zu Logiken höherer Stufe. Ich werde im nächsten Abschnitt nochmals kurz auf diese Unterscheidung zu sprechen kommen, welche auch in den monumentalen *Principia Mathematica* [10] von Bertrand Russell (1872–1970) und Alfred North Whitehead (1861–1947) eine bestimmende Rolle spielt.)

Man mache sich die Bedeutung von Satz 1 klar: Die Peanoaxiome legen die Struktur der natürlichen Zahlen als System mit Null, Nachfolger, Addition und Multiplikation eindeutig fest. Auch die Rolle jedes einzelnen Elements ist durch die Eindeutigkeit des Isomorphismus unverrückbar festgelegt. Nicht näher bestimmt bleibt lediglich die Bezeichnung der einzelnen Elemente (natürliche Zahlen) und, wenn man philosophisch anspruchsvoll ist, ihre Bedeutung. Die Unbestimmtheit in der Bezeichnung soll uns nicht weiter kümmern. Denn schließlich wollen wir ja alle Sprachen dieser Welt zulassen und auch verschiedene mathematische Notationssysteme. Die Frage nach der Bedeutung hingegen wird uns noch zu Interessantem führen.

4 Anzahlen als Eigenschaften von Mengen

Denkt man nur an den Prozess des Zählens im Sinne von *Durchnummerieren*, so lässt sich die Bedeutung der Zahlen aus den Peanoaxiomen durchaus sinnvoll ablesen: Da es nur auf die Position in der Zahlenreihe ankommt und diese wegen der Eindeutigkeit des Isomorphismus f zwischen zwei Modellen determiniert ist, sagen uns die Peanoaxiome unter diesem Gesichtspunkt auch alles über die einzelnen Zahlen: Jede repräsentiert eine ganz bestimmte, sie eindeutig kennzeichnende Position in einer linearen Ordnung. Man spricht daher auch von einer **Ordinalzahl**, hier zunächst in einem philosophischen, noch nicht mengentheoretisch-technischen Sinn.

Wenn man an die endliche Kombinatorik denkt, wird aber ein darüber hinausgehendes Anliegen deutlich: Es geht uns auch um Anzahlen von Objekten, die nicht von vornherein durchnummeriert sind. Eine natürliche Zahl soll also (auch, wenn nicht gar vor allem) die Bedeutung einer bestimmten Anzahl haben; mathematisch formuliert: der **Kardinalzahl**, Kardinalität oder Mächtigkeit $|M|$ einer (endlichen) Menge M. Eine naheliegende Möglichkeit, dies zu präzisieren, lautet wie folgt:

Die Kardinalität einer Menge M ist 0, falls sie keine Elemente besitzt. Symbolisch:

$$|M| = 0 :\Longleftrightarrow \forall x : x \notin M.$$

Nicht viel schwieriger ist die Definition einer einelementigen Menge M, die ja durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet ist: M enthält ein Element, wählt man aber nochmals ein Element aus dieser Menge aus, muss es mit dem ersten Element übereinstimmen, symbolisch:

$$|M| = 1 :\Longleftrightarrow \exists x : (x \in M \wedge \forall y : (y \in M \Longrightarrow y = x)).$$

Analog kann man definieren:

$$|M| = 2 :\Longleftrightarrow \exists x, y : (x \in M \wedge y \in M \wedge x \neq y \wedge (\forall z : (z \in M \Longrightarrow z = x \vee z = y))).$$

Um dem ersten Teil des Titels des vorliegenden Artikels schon an dieser Stelle zu entsprechen und wenigstens bis drei zu zählen, setze ich noch eins drauf:

$$\begin{aligned} |M| = 3 :\Longleftrightarrow \quad & \exists x, y, z : (x \in M \wedge y \in M \wedge z \in M \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \\ & (\forall w : (w \in M \Longrightarrow w = x \vee w = y \vee w = z))). \end{aligned}$$

Spätestens jetzt vergeht mir und wohl auch dem geduldigsten Leser die Lust, dieses Schema fortzusetzen, obwohl (oder vielleicht gerade weil) klar ist, wie es weitergehen muss. Viel mehr lohnt es sich, grundsätzliche Überlegungen anzustellen.

Der Erfolg obigen Ansatzes besteht darin gezeigt zu haben, dass logische ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, Negation, $=$) und syntaktische Symbole (Klammern, Doppelpunkte etc.) allein hinreichen, um die Bedeutung einzelner natürlicher Zahlen sinnvoll zu beschreiben. Die natürlichen Zahlen als Einzelobjekte lassen sich also aus der Logik allein verstehen. Dennoch bleiben mehrere Probleme ungelöst:

Erstens kann zwar jede Zahl einzeln erfasst werden, es ist aber keine Möglichkeit in Sicht, in einer einzigen endlichen Formel zu definieren, was eine natürliche Zahl ist. Die potentiell unendliche Fortsetzung des obigen Schemas als explizite Auflistung aller Zahlen kann uns diesbezüglich nicht zufriedenstellen.

Zweitens, daraus folgend, ist es nicht möglich, das Objekt $\mathbb{N}$, also die (unendliche) Menge der natürlichen Zahlen, zu definieren.

Drittens legen obige Definitionen zwar fest, durch welche wohlgeformte ausführlichere Aussage z. B. die Kurzschreibweise $|M| = 3$ interpretiert werden soll. Damit ist aber die Zahl 3 nicht als mathematisches Objekt definiert, sondern lediglich eine Kurzschreibweise für eine bestimmte Eigenschaft eingeführt, die Mengen haben können oder auch nicht (nämlich dreielementig zu sein). Das rührt an einer grundlegenden Frage im Grenzbereich zwischen Philosophie, Sprache und Logik: Sind Eigenschaften auch Objekte?

Die mathematische Logik hat zu dieser Frage die Unterscheidung prädikatenlogischer Sprachen erster und höherer Ordnung beizutragen. In einer Sprache erster Ordnung dürfen die logischen Quantoren $\exists$ und $\forall$ nur vor Variablen für Objekte der untersten Stufe (in den Peanoaxiomen wären das die Zahlen, nicht aber Mengen von Zahlen, geschweige denn Mengen von Mengen von Zahlen etc.) stehen. Der Vorteil: In diesem Zusammenhang lässt sich der Gödelsche Vollständigkeitssatz beweisen. Er besagt in einem mathematisch präzisen Sinne, dass sich die Gesetze des logischen Schließens vollständig beschreiben lassen. Der Nachteil, bezogen auf die Peanoaxiome: Man muss sich entscheiden, ob Variablen nur natürliche Zahlen repräsentieren dürfen (wie in allen Peanoaxiomen außer PA5), oder ob man auch Mengen zulässt (wie im Induktionsprinzip PA5). Im ersten Fall muss PA5 umformuliert werden und man verliert die Eindeutigkeit des durch PA1-PA7 beschriebenen Systems (vgl. die Diskussion in Klammern nach Satz 1). Im zweiten Fall müsste man z. B. klären, was unter $a + b$ zu verstehen ist, wenn a und b Mengen sind.

Bevor wir den Ausweg beschreiten können, den John von Neumann (1903–1957), vgl. [8], in seiner Dissertation geebnet hat, rekapitulieren wir einige einfache Konzepte.

5 Gleichmächtigkeit als Grundbegriff

Eine der einfachen und dennoch größten mathematischen Ideen war die Beobachtung von Georg Cantor (1845–1918), dem Schöpfer der Mengenlehre (vgl. [2]), dass sich — ohne auf den noch unklaren Begriff der Anzahl zurückzugreifen! — sehr leicht definieren lässt, wann zwei Mengen gleich viele Elemente haben, d. h. gleich mächtig sind:

Die Mengen A und B heißen gleich mächtig, symbolisch $A \sim B$, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. (Wer's genauer haben will: Es gibt eine Menge f, deren Elemente geordnete Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ sind, wo jedes $a \in A$ genau einmal als erste, jedes $b \in B$ genau einmal als zweite Komponente auftritt. Geordnete Paare (a, b) kann man, wenn man will, formal auch wieder als Mengen auffassen, üblicherweise als $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

Man überzeugt sich unmittelbar, dass $\sim$ die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation aufweist: $A \sim A$ (vermittels der identischen Funktion als Bijektion), $A \sim B$ impliziert $B \sim A$ (indem man die Umkehrfunktion eines bijektiven $f : A \to B$ betrachtet), und $A \sim B$ und $B \sim C$ implizieren zusammen $A \sim C$ (Komposition der Bijektionen betrachten).

Ist M beispielsweise eine Menge mit drei Elementen, so sind die zu M äquivalenten Mengen genau jene mit drei Elementen. Die Äquivalenzklasse von M besteht also genau aus allen dreielementigen Mengen und lässt sich philosophisch als Inbegriff der Zahl 3 ansehen. Entsprechendes lässt sich über beliebige Mengen und ihre Äquivalenzklassen sagen, wobei allerdings die Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Mengen als noch offene Frage im Raum steht.

Der bereits erwähnte Bertrand Russell und der ebenfalls große Logiker und Philosoph Gottlob Frege (1848–1925, bedeutend vor allem durch [4]) haben jeweils um 1910 diesen bestechenden Zugang vorgeschlagen: Die natürlichen Zahlen sind definitionsgemäß die Äquivalenzklassen endlicher Mengen. Es stellt sich allerdings heraus, dass man sich mit dieser Definition Konsequenzen einhandelt, die manch Irritierendes an sich haben. So erhält man etwa die seltsamen Beziehungen $1 \in \{1\} \in 1$ oder $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \in 1 \in \mathbb{N}$. Bemerkenswert ist, dass es Russell selbst war, der schon um 1900 erkannt hatte, dass solch freizügige Konstruktionen von Mengen Gefahren in sich bergen. Damals hatte er das Paradoxon der nach ihm benannten Russellmenge bzw. -klasse $R = \{X : X \notin X\}$ entdeckt. R enthält nach Definition genau diejenigen Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Die Frage, ob $R \in R$ gilt, führt zum unauflöslichen Widerspruch: Ist $R \in R$, so nach Definition der Elemente von R auch $R \notin R$ und umgekehrt.

Derartige Phänomene führten schließlich zur Einsicht, dass man mit Mengen nicht beliebig operieren kann, so wie es eine naive Intuition zu rechtfertigen scheint. Im Gegensatz dazu muss man, gewissermaßen mit der leeren Menge klein beginnend, sorgfältig formulieren, welche Konstruktionsschritte man zulässt. Auf diese Art und Weise kam es zu den Axiomensystemen der Mengenlehre, von denen das System von Zermelo-Fraenkel (ZF), ergänzt um das Auswahlaxiom (AC), das gebräuchlichste ist und mit ZFC abgekürzt wird. Was ich früher über die Peanoaxiome als Beschreibung des Systems der natürlichen Zahlen gesagt habe, gilt entsprechend auch für ZFC. Es beansprucht nicht, metaphysische Wahrheiten über das Wesen der Mengen oder gar der Welt zu fixieren. Es beschreibt viel mehr, wie wir mit dem System aller Mengen umgehen dürfen. Damit wird uns auch ein Rahmen gesteckt, was wir uns darunter (vielleicht) vorstellen dürfen und was sicher nicht. Ähnlich den Peanoaxiomen sagen auch die Axiome von ZFC mehr oder weniger Selbstverständliches (gemessen an einem naiven Mengenbegriff). Grob formuliert enthalten diese Axiome folgende Aussagen:

Es gibt eine leere Menge (Axiom von der leeren Menge). Zwei Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind identisch (Extensionalitätsaxiom). Je zwei Mengen bilden gemeinsam (als Elemente genommen) stets eine (zweielementige) Menge (Paarmengenaxiom). Zu jeder Menge gibt es die Menge aller Teilmengen (Potenzmengenaxiom). Zu jeder Menge (von Mengen) gibt es die Vereinigungsmenge (Vereinigungsmengenaxiom). Es gibt eine unendliche Menge (Unendlichkeitsaxiom; auf die genauere Formulierung komme ich später noch zu sprechen). Das Bild einer Menge durch eine Funktion ist wieder eine Menge (Ersetzungsschema; eine völlig korrekte Formulierung erforderte technisch einigen Aufwand und unterbleibt daher hier). Linksseitig unendliche $\in$-Ketten $\ldots a_3 \in a_2 \in a_1 \in a_0$ kommen nicht vor. (Dieses sogenannte Regularitäts- oder Fundierungsaxiom besagt in seiner formal korrekten Formulierung, dass es in jeder nichtleeren Menge ein $\in$-minimales Element gibt. Es spielt fast nur in der Mengenlehre eine Rolle und schließt insbesondere auch zyklische Elementschaftsketten wie die weiter oben vorkommende Beziehung $1 \in \mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\} \in 1$ aus.) Zu jeder Menge M nichtleerer paarweise disjunkter Mengen gibt es eine sogenannte Auswahlmenge, die aus jedem $X \in M$ genau ein Element enthält (Auswahlaxiom).

Wieder in Analogie zu den Peanoaxiomen liegt das Großartige des Axiomensystems ZFC nicht in irgendwelchen tiefen Wahrheiten, sondern daran, dass es die wesentliche Information enthält, um (fast) alles daraus abzuleiten, was man in der Mathematik braucht. Und das ist viel! Man vergleiche mit einem der größten Anliegen der Physik: die Grundkräfte (Gravitation, elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung) aus einem einzigen, fundamentaleren Prinzip heraus zu erklären, was bisher nur in Ansätzen gelungen ist. Die Mengenlehre dagegen kann als so ein fundamentales Prinzip gelten, weil auf dem Mengenbegriff als Grundlage die Zahlentheorie ebenso aufgebaut werden kann wie fast alle anderen Teilgebiete der Mathematik. Die Zahlentheorie allein ist dazu jedoch nicht imstande. Ein Mathematikunterricht ohne Mengenbegriff wäre also vergleichbar mit einem Physikunterricht, der nicht nach den Grundbausteinen der Materie fragt, also ohne Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik.

Die besondere Leistungsfähigkeit der Mengenlehre ist allerdings nicht auf den ersten Blick klar. Wie lässt sich die Vielfalt mathematischer Teildisziplinen und ihrer Objekte gänzlich auf Mengen zurückführen? Natürlich kann und will ich hier nicht auf all das eingehen. Wir können aber die uns nach wie vor interessierende Frage, was denn die natürlichen Zahlen sind, in diesem neuen Licht untersuchen.

6 John von Neumanns mengentheoretisches Modell für $\mathbb{N}$

Nach den ausführlichen Vorbereitungen der vorangehenden Abschnitte, in denen wir die Mengen als fundamentale Objekte erkannt haben, ergibt sich der bereits angekündigte Vorschlag von John von Neumann für eine Definition der natürlichen Zahlen als Mengen ziemlich organisch. Man hat es lediglich so zu tun, dass auch die Bedeutung als Anzahlen erfasst wird, dass also eine natürliche Zahl n eine geeignete Menge mit n Elementen ist. Vergleichen wir mit dem Ansatz von Frege und Russell aus dem vorangehenden Abschnitt, geht es also darum, aus Äquivalenzklassen gleich mächtiger Mengen Vertreter auszuwählen. An und für sich kann man das irgendwie machen. Es gibt aber eine bestimmte Möglichkeit, die durch ihre besondere Eleganz besticht.

Fangen wir mit der Null an. Es gibt eine Menge ohne Elemente, nämlich die leere Menge. Dass es sie gibt, ist axiomatisch festgehalten; dass es *höchstens* eine Menge mit dieser Eigenschaft geben kann, folgt aus dem Extensionalitätsaxiom, denn je zwei leere Mengen enthalten dieselben Elemente (nämlich jeweils keines) und sind daher identisch. Im Fall der Null haben wir also keine Wahl und müssen $0 := \emptyset = \{\}$ setzen. Die Auswahl unter den einelementigen Mengen ist nicht mehr eindeutig. Auf die Frage, wie wir in einer Definition $1 := \{x\}$ das eine Element x am besten zu wählen haben, gibt es aber eine naheliegende Antwort: Wir nehmen das einzige Objekt (die einzige Menge), die wir schon kennen, nämlich $x = 0 = \emptyset$, also $1 = \{0\}$. Ein analoges Argument, legt nahe, in $2 := \{x, y\}$ die beiden bisherigen Elemente $x = 0$ und $y = 1$ zu wählen, also $2 = \{0, 1\}$. Ebenso kommt man auf $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ usw. (Endlich haben wir sogar über drei hinaus gezählt!) Allgemein lässt sich das notieren als $n' := n \cup \{n\}$. Der Nachfolger von n wird also gebildet, indem man zu den Elementen von n noch n selbst als Element hinzufügt. Sind wir damit wunschlos glücklich?

Glücklich ja, weil diese Konstruktion der natürlichen Zahlen tatsächlich funktioniert. Wunschlos aber noch nicht ganz. Denn erstens ist in unserer rekursiven Konstruktion ein induktiver Prozess involviert, der bei genauerer Analyse das Induktionsprinzip aus den Peanoaxiomen beansprucht, wovon wir uns gerade frei machen wollten. Außerdem hätten wir gerne die Menge $\mathbb{N}$ auch als Ganzes in die Hand bekommen. Beide Wünsche werden durch das bereits erwähnte Unendlichkeitsaxiom erfüllt. Geschickterweise spricht es in Wahrheit nämlich nicht explizit von unendlichen Mengen. (An dieser Stelle wäre ja gar nicht klar, was eine unendliche Menge überhaupt ist.) Hingegen behauptet es schlicht, dass es eine induktive Menge gibt. Wir erinnern uns an PA5, wo eine Menge T als induktiv bezeichnet wurde, wenn sie 0 enthält und mit jedem Element auch seinen Nachfolger. Zwar hatten wir damals als Elemente von T natürliche Zahlen im Sinn und keine Mengen. Mit der obigen Festsetzung $0 = \emptyset$ und $n' = n \cup \{n\}$ ist aber klar, was die Nullmenge und was eine Nachfolgermenge ist. Also ist klar, was eine induktive Menge ist. Als Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen haben wir lediglich die minimale induktive Menge zu wählen, also

$$\mathbb{N} := \bigcap\{T : \ T \,\text{induktiv}\} = \{n : \ \forall T \ (T \text{ induktiv} \Longrightarrow n \in T)\}.$$

Nach dem Unendlichkeitsaxiom gibt es mindestens eine induktive Menge, und eine Konsequenz des Ersetzungsschemas ist, dass jede Teilmenge davon wieder eine Menge ist, insbesondere der Schnitt mit anderen Mengen. Weil jede induktive Menge die leere Menge $0 = \emptyset$ enthält und mit jeder Menge n auch ihren Nachfolger n', gilt das auch für jeden Schnitt induktiver Mengen, insbesondere für die wie oben definierte Menge $\mathbb{N}$. Bezeichnen wir die (mengentheoretische) Nachfolgerabbildung eingeschränkt auf $\mathbb{N}$ mit ν, so bedeutet das mit anderen Worten: $\mathcal{M} := (\mathbb{N}, 0, \nu)$ erfüllt die Peanoaxiome PA1 und PA2. Auch PA3 gilt in dieser Interpretation, weil $n \in \{n\} \subseteq n \cup \{n\} = n'$, also $n' \neq \emptyset = 0$ gilt. Zum Induktionsprinzip PA5: Ist T eine induktive Menge, so tritt sie in der Definition von $\mathbb{N}$ als Element des Mengensystems rechts auf, dessen Durchschnitt gebildet wird. Also ist T eine Obermenge dieses Durchschnitts, also eine Obermenge von $\mathbb{N}$. Damit steht uns das Induktionsprinzip PA5 für den noch ausstehenden Beweis von PA4 zur Verfügung. Mit PA5 beweist man leicht die sogenannte Transitivität natürlicher Zahlen, nämlich dass für $m, n \in \mathbb{N}$ stets die Implikation $m \in n \Longrightarrow m \subseteq n$ gilt. (Beweis: Ist T die Menge aller n, so dass die Implikation für alle m gilt, so ist trivialerweise $0 = \emptyset \in T$, und aus $n \in T$ folgt $n' \in T$: $m \in n' = n \cup \{n\}$ impliziert nämlich $m = n \subseteq n'$ oder $m \in n$, was wegen $n \in T$ ebenfalls $m \subseteq n \subseteq n'$ zur Folge hat.) Jedes $k \in n' = n \cup \{n\}$ erfüllt deshalb entweder $k \subseteq n$ oder $k \in n$. Damit ergibt sich in

$$n \subseteq \bigcup_{k \in n'} k \subseteq n$$

die zweite Inklusion, die erste wiederum, weil $n \in n'$ selbst als k in der Vereinigung auftritt. Also stimmt n mit der Vereinigung überein, die ihrerseits nur von n' abhängt. Deshalb folgt aus $m' = n'$ tatsächlich (PA4)

$$m = \bigcup_{k \in m'} k = \bigcup_{k \in n'} k = n.$$

Bei kritischer Betrachtungsweise sind wir noch nicht viel weiter, als wir schon im Abschnitt über die Peanoaxiome waren: Wir haben uns von ihrer Gültigkeit überzeugt, wenn auch diesmal nicht anhand eines naiven Zahlbegriffs, sondern anhand einer speziellen mengentheoretischen Konstruktion der natürlichen Zahlen. Bei aller Eleganz haftet derselben aber doch auch etwas Willkürliches an.

Eine etwas optimistischere Sicht lässt uns aber festhalten: Wir haben ein mengentheoretisches Modell der Peanoaxiome konstruiert. Das bedeutet immerhin, dass wir die Existenz der natürlichen Zahlen auf die Gültigkeit der in gewissem Sinne noch fundamentaleren mengentheoretischen Axiome von ZFC zurückgeführt haben. Wir wollen aber noch mehr, nämlich die Definition der Kardinalität endlicher Mengen als natürliche Zahlen. Diese Definition liegt angesichts der bisher zusammengetragenen Ideen auf der Hand:

Eine Menge M heißt **endlich**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M \sim n$ gibt. In diesem Fall heißt dieses n die Kardinalität von M, symbolisch $|M| = n$.

Man beachte, dass nach von Neumann alle $n \in \mathbb{N}$ Mengen sind. Es hat also einen Sinn, von bijektiven Abbildungen $f : M \to n$ zu sprechen. Insbesondere belegt die identische Abbildung auf n, dass $|n| = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dennoch sind wir noch nicht ganz am Ziel. Wir müssen erst sicherstellen, dass jenes n mit $|M| = n$ eindeutig ist, ansonsten wäre obige Definition einer Kardinalität sinnlos. Glücklicherweise gilt aber:

Satz 2 *Aus $M \sim m$, $M \sim n$ (also $m \sim n$) und $m, n \in \mathbb{N}$ folgt $m = n$.*

Diese Aussage mag auf den ersten Blick so selbstverständlich sein, dass ein Beweis überflüssig anmutet. Folgende Argumentation scheint unwiderstehlich: $M \sim m$ bedeutet, dass M gerade m Elemente hat, wegen $M \sim n$ aber auch n Elemente, also müssen m und n übereinstimmen. Dieser Schluss klingt aber nur deshalb so überzeugend, weil wir uns daran gewöhnt haben, dass Anzahlen charakteristische und unveränderliche Eigenschaften (Invarianten) von Mengen sind. In Wahrheit ist aber das Auftreten von Mengen das ursprünglichere Phänomen. Der Zahlbegriff ergibt sich erst durch Abstraktion daraus. Der oben hervorgehobene Satz ist also von allergrößter Bedeutung für die Mathematik, gerade weil er dem zugrundliegt, was selbst den mathematisch ungebildetsten Menschen (wenn auch nur aus Gewohnheit) selbstverständlich ist und was sie auch ständig verwenden. Darum schlage ich vor, diesen Satz den **Hauptsatz der Elementarmathematik** zu nennen. *Hauptsatz*, weil er den Hintergrund für die Bedeutung der natürlichen Zahlen bildet und diese als die ersten Objekte der Mathematik gelten; der *Elementar*-mathematik deshalb, weil er so elementar ist, dass selbst die unmathematischsten Menschen, die aus Abneigung sogar die einfachsten Additionen meiden würden, in ihrem Alltag ohne (wenn auch unbewusste) Anwendung dieses Satzes nicht auskommen.

Erheben wir den Anspruch, dem Zahlbegriff so weit wie möglich auf den Grund zu gehen, bleibt es uns an dieser Stelle nicht erspart, uns um einen strengen **Beweis** dieses Satzes zu bemühen. Hier ist er:

Zunächst gilt (Behauptung 1) $n \notin n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Dies folgt unmittelbar aus dem Fundierungsaxiom. Aber auch ohne dieses findet sich sehr leicht ein Beweis: Gäbe es nämlich ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \in n$, so wäre $n' = n \cup \{n\} = n$, und daher n sein eigener Nachfolger. Dass dies nicht möglich ist, zeigt aber ein einfacher Induktionsbeweis mit Hilfe der Menge $T := \{n \in \mathbb{N} : \ n \neq n'\}$. Wegen PA3 ist nämlich $0 \in T$. Aus $n \in T$, also $n \neq n'$, folgt außerdem $n' \in T$. Denn $n' \notin T$, also $n' = n''$, ergäbe nach PA4 $n = n'$, Widerspruch.) Ein geradezu triviales Induktionsargument, das ich dem Leser überlasse, zeigt, dass (Behauptung 2) jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder $n = 0$ erfüllt, oder ein Nachfolger $n = k'$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist. Die für den Satz zu beweisende Implikation $m \sim n \Longrightarrow m = n$ ergibt sich nun ebenfalls durch Induktion, angewendet auf die Menge T aller $n \in \mathbb{N}$, welche die Implikation für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllen: Ist $n = 0$ und $m \sim n = \emptyset$, so auch $m = \emptyset = 0 = n$, also $0 \in T$ (Induktionsanfang). Induktionsschritt: Sei $n \in T$ und $n' = n \cup \{n\} \sim m$, d. h. es gibt ein bijektives $f : n' \to m$. Wegen $f(n) \in m$ ist $m \neq \emptyset = 0$, also (wegen Behauptung 2) $m = k' = k \cup \{k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Ist $f(n) = k$, so ist die Einschränkung f' von f auf $n = n' \setminus \{n\}$ (in dieser Gleichung wurde Behauptung 1 verwendet) eine Bijektion $f' : n \to k$. Andernfalls erhalten wir eine solche, indem wir $f'(f^{-1}(k)) = f(n)$ setzen und $f'(l) = f(l)$ für alle anderen $l \in n$. In beiden Fällen erhalten wir $k \sim n$, also, wegen $n \in T$, $k = n$, $m = k' = n'$ und somit $n' \in T$.

Damit sind die Peanoaxiome PA1–PA5 nicht nur auf einer mengentheoretischen Basis bewiesen, wir haben auch die eingangs gestellten Fragen, was die Menge $\mathbb{N}$ und ihre Elemente sind, aus mathematischer Sicht beantwortet. Bevor ich mich den noch ausstehenden Axiomen PA6 und PA7 unter den neu gewonnenen Gesichtspunkten zuwende, will ich eine in eine andere Richtung weisende Andeutung einflechten.

Nachfolger $n' = n \cup \{n\}$ sind für beliebige Mengen n sinnvoll definiert. Warum also unsere Konstruktion nicht auch auf unendliche Mengen anwenden, etwa auf $\mathbb{N}$ selbst? Tatsächlich hat diese Fortsetzung große Bedeutung in der Mengenlehre. Es hat sich eingebürgert, in diesem Zusammenhang für $\mathbb{N}$ das Symbol ω zu verwenden und mit $\omega' = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega\}$, wofür man auch $\omega + 1$ schreibt, fortzusetzen. Doch auch damit ist man nicht an einem Ende angelangt, weil auch $\omega + 1$ einen Nachfolger $\omega + 2$ besitzt etc. Die so erhaltenen Objekte nennt man (unendliche, transfinite) Ordinalzahlen. An ihnen zeigt sich ein gegenüber den endlichen natürlichen Zahlen neuartiges Phänomen. Im Kontrast zum Hauptsatz der Elementarmathematik können verschiedene unendliche Ordinalzahlen nämlich sehr wohl gleich mächtig sein. Zum Beispiel besteht zwischen ω und $\omega + 1$ die Bijektion $0 \mapsto \omega$ und $n + 1 \mapsto n$, $n \in \omega = \mathbb{N}$. Will man Kardinalzahlen $|M|$ auch für unendliche Mengen M eindeutig als Ordinalzahl definieren, muss man deshalb festlegen, welches α mit $M \sim \alpha$ man auswählt, und zeigen, dass es überhaupt eine solche Ordinalzahl α gibt. Die erste Aufgabe kann man lösen, indem man das kleinste aller möglichen α nimmt. Ein solches gibt es immer, weil man beweisen kann, dass jede nichtleere Menge (oder auch Klasse) von Ordinalzahlen ein kleinstes Element besitzt (Wohlordnungseigenschaft). (Dabei kann man $\alpha < \beta$ durch $\alpha \in \beta$ oder, äquivalent, $\alpha \subset \beta$ definieren.) Dass für jedes M wenigstens eine Ordinalzahl α mit $M \sim \alpha$ existiert, folgt aus dem Wohlordnungssatz: Auf jeder Menge M gibt es eine Wohlordnung. Kardinalzahlen sind also die minimalen Elemente in den $\sim$–Äquivalenzklassen von Ordinalzahlen.

7 Natürliche Begründung der Arithmetik

Abschließend wenden wir uns den Axiomen PA6 und PA7 zu, welche die Grundrechnungsarten Addition und Multiplikation betreffen. Verfügt man über den Begriff der Kardinalität von Mengen, so liegen die Definitionen auf der Hand: Sind A und B Mengen mit den Kardinalitäten $|A| = a$ und $|B| = b$, so sei $a + b := |A \cup B|$ (dies nur unter der Voraussetzung dass $A \cap B = \emptyset$) und $a \cdot b := |A \times B|$, wobei die Elemente des sogenannten kartesischen Produktes $A \times B$ bekanntlich genau die geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ sind. Noch einmal müssen wir arbeiten, und zwar um diese Definitionen zu rechtfertigen.

Zunächst ist die Wohldefiniertheit nachzuprüfen. Im Falle der Addition (disjunkte Vereinigung) halten wir zunächst fest, dass es zu je zwei $a, b \in \mathbb{N}$ überhaupt disjunkte Mengen A, B mit $|A| = a$ und $|B| = b$ gibt, nämlich z. B. $A := A \times \{0\}$ und $B := B \times \{1\}$. Weiters müssen wir zeigen: Ist $|A_1| = a = |A_2|$, $|B_1| = b = |B_2|$ und $A_1 \cap B_1 = \emptyset = A_2 \cap B_2$, so folgt $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_2|$. Der Beweis ergibt sich, indem man die nach Voraussetzung vorhandenen Bijektionen $f : A_1 \to A_2$ und $g : B_1 \to B_2$ zu $h := f \cup g$ vereinigt und sich davon überzeugt, dass $h : A_1 \cup B_1 \to A_2 \cup B_2$ eine Bijektion ist. Für die Multiplikation definiert man statt dessen die Bijektion $h : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ durch $h(a, b) := (f(a), g(b))$, woraus $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$ ersichtlich ist.

Damit wir Addition und Multiplikation als Operationen auf $\mathbb{N}$ auffassen dürfen, müssen wir sicherstellen, dass die Vereinigung und das kartesische Produkt zweier endlicher Mengen wieder endlich sind. Ein strenger Beweis erfolgt am besten durch Induktion, liefert aber auch gleich die Gültigkeit der noch zu überprüfenden Peanoaxiome mit:

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig und T die Menge aller $b \in \mathbb{N}$, für die $a + b$ in $\mathbb{N}$ liegt. Wir wollen auf T das Induktionsprinzip anwenden. Wegen $a + 0 = |a \cup \emptyset| = |a| = a \in \mathbb{N}$ ist $0 \in T$ und außerdem PA6(a) bewiesen (Induktionsanfang). Für den Induktionsschritt sei $b \in T$ vorausgesetzt. Also ist $a + b \in \mathbb{N}$. Es gibt daher disjunkte endliche Mengen A und B mit $|A| = a$ und $|B| = b$ und eine Bijektion $f : A \cup B \to a + b$. Wir finden leicht irgendein Element $c \notin A \cup B$ (etwa $c := A \cup B$). Dann lässt sich f durch die Festsetzung $f'(c) := a + b \in (a + b)'$ zu einer Bijektion $f' : A \cup B' \to (a + b)' \in \mathbb{N}$ mit $B' := B \cup \{c\}$ fortsetzen. Gleichzeitig setzt sich jede (wegen $|B| = b$ vorhandene) Bijektion $g : B \to b$ vermittels $g'(c) := b \in b' = b \cup \{b\}$ zu einer Bijektion $g' : B' \to b'$ fort. Das zeigt $a + b' = |A \cup B'| = (a + b)' \in \mathbb{N}$, also auch gleich PA6(b).

Für Produkte ist der Beweis kürzer: Ist $a \in \mathbb{N}$ beliebig, so betrachten wir die Menge T aller $b \in \mathbb{N}$, für die ab endlich ist. Wegen $a0 = |A \times \emptyset| = |\emptyset| = 0 \in \mathbb{N}$ ist $0 \in T$. Außerdem zeigt diese Beziehung bereits PA7(a). Aus der Annahme $b \in T$, also $ab \in \mathbb{N}$, rechtfertigt man bei analoger Bezeichnungsweise wie zuvor sehr schnell $ab' = |A \times B'| = |A \times B \cup A \times \{c\}| = |A \times B| + |A \times \{c\}| = ab + |A| = ab + a \in \mathbb{N}$, also $b' \in T$ und gleichzeitig PA7(b).

Damit haben wir bewiesen:

Satz 3 *Die natürlichen Zahlen im Sinne der von Neumannschen Definition zusammen mit der Definition der Addition über disjunkte Vereinigungen und der Multiplikation über kartesische Produkte bilden ein Modell der Peanoaxiome PA1–PA7.*

Ein Beweis für das in Abschnitt 3 mittels der Peanoaxiome etwas formalistisch bewiesene Assoziativgesetz der Addition ergibt sich nun auf sehr natürliche und geradezu triviale Weise: Für vorgegebene Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ hat man nur irgendwelche disjunkte Mengen A, B, C mit $|A| = a$, $|B| = b$ und $|C| = c$ zu betrachten. Offensichtlich liegt ein beliebiges Element x genau dann in $(A \cup B) \cup C$, wenn es in einer der drei Mengen liegt, was genau dann der Fall ist, wenn es in $A \cup (B \cup C)$ liegt. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind daher die Mengen $(A \cup B) \cup C$ und $A \cup (B \cup C)$ identisch, und es ergibt sich

$$(a + b) + c = |A \cup B| + |C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| = a + (b + c).$$

Klarerweise folgt noch einfacher das Kommutativgesetz $a + b = b + a$ ebenso wie zahlreiche andere fundamentale arithmetische Eigenschaften, die jetzt nicht mehr alle durch formalistisch anmutende, langweilige Induktionsbeweise hergeleitet werden müssen. Die meisten von ihnen erlauben vermittels ihrer mengentheoretischen Interpretation Beweise, die der intendierten Bedeutung der

Gesetze viel näher kommen und deshalb wahrscheinlich nicht nur von mir als natürlicher und befriedigender empfunden werden.

Der Kreis hat sich geschlossen. Auf unserem Weg haben wir den Begriff der natürlichen Zahlen mathematisch ziemlich umfassend geklärt und dabei eingesehen, dass ein tiefes Verständnis unvermeidlich an den Mengenbegriff gebunden ist. Vom philosophischen Standpunkt freilich ist die Diskussion offen und kann, ein paar interessierte Schülerinnen oder Schüler vorausgesetzt, jeden Mathematikunterricht beleben — heute und wohl solange es Menschen und Schulen gibt.

Dank: Ich danke Martin Goldstern für wertvolle Hinweise zu einer konziseren Darstellung gewisser Beweise.

Literatur

[1] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics, Theory of Sets*, Hermann, Publishers in Arts and Science, Paris (2. Auflage 1974) Historical Note on Chapters I–IV, Seiten 296–343; ebenso als erstes Kapitel in *Elements of the History of Mathematics* (englische Übersetzung des französischen Originals), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, Zweite Auflage (1999)

[2] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin–New York (1980), Neudruck des Originals (1932)

[3] Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Achte unveränderte Auflage (1960) des Originals (1888), auch in *Gesammelte mathematische Werke*, drei Bände, Vieweg, Braunschweig (1932)

[4] Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle (1879)

[5] Kurt Gödel, *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, Universität Wien, Dissertation (1929/30)

[6] Martin Goldstern und Haim Judah, *The Incompleteness Phenomenon*, AK Peters Wellesley, Massachusetts (1995)

[7] Gerald Kuba und Stefan Götz, *Zahlen*, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main (2004)

[8] John von Neumann, *Collected Works*, sechs Bände, Pergamon Press (ab 1961)

[9] Giuseppe Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita (1889)*, in G. Peano, *Opere scelte II*, 20–55, Rom (1958)

[10] Bertrand Russell und Alfred North Whitehead, *Principia Mathematica*, drei Bände, Cambridge (1910–13)

[11] Joseph R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic, AK Peters, Ltd., Natick, Massachusetts (1967, Neudruck 2000)